МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Югорский государственный университет»
(ИндИ (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для решения задач по теме: «Производная»

ОУД.05 Математика

08.02.09. Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования

промышленных и гражданских зданий

г. Нефтеюганск
2021

РАССМОТРЕНО:
Предметной (цикловой)
комиссией МиЕНД
Протокол № 1 от 09.09.2021г.
Председатель ПЦК
___________ Ю.Г. Шумскис

СОГЛАСОВАНО:
заседанием Методсовета
протокол № 1 от 16.09.2021г.
Председатель методсовета
_____________Н.И. Савватеева

Разработчик: Аюпова И.К.- преподаватель ИндИ (филиала) ФГБОУ ВО «ЮГУ».

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Содержание разделов курса, составляющих начала математического анализа вызывает затруднение у многих обучающихся.

Однако, все обучающиеся должны знать определение производной, основные правила дифференцирования и формулы производных элементарных функций, понимать геометрический смысл производной, знать уравнение касательной.

Первоначально происходит формирование начальных умений находить производные элементарных функций на основе определения производной.

В дальнейшем все обучающиеся должны овладеть правилами дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, вынесения постоянного множителя за знак производной.

В результате изучения темы у обучающихся должны быть сформированы умения находить производные элементарных функций.

После усвоения обучающимися таблиц производных элементарных функций и правил дифференцирования происходит знакомство с геометрическим смыслом производной, обучение составлению уравнений касательной к графику функции в заданной точке.

Очень важно знать всем обучающимся, что с помощью производной можно аналитически установить много важных свойств функции. Все обучающиеся должны применять производную к нахождению наибольшего и наименьшего значения функций, решать прикладные задачи на «Экстремум».

В ходе изучения темы необходимо знать определения точек максимума и минимума, стационарных и критических точек; уметь применять необходимые и достаточные условия экстремума для нахождения точек экстремума.

Методические указания по теме «Производная» предназначены для обучающихся 1 курсов.

Методические указания содержат справочный материал по нахождению производной, примеры решения, а так же задания для практической работы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Определение. *Производной* функции y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Правило вычисления производной:

1)Вычислить значение функции y, соответствующее данному значению аргумента x;

2)Придать данному значению аргумента приращение Δx и вычислить новое значение y+ Δy функции;

3)Вычесть прежнее значение функции из нового и тем самым определить приращение Δy функции;

4)Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. разделить вычисленное приращение Δy на Δx;

5)Найти предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$; этот предел и дает искомую производную.

Пример: Пользуясь определением, найдем производную функции: $f(x) = x^2 - 5x + 7$

Решение:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 7 - (x^2 - 5x + 7)$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x = (2x + \Delta x - 5)\Delta x.$$

Вычислим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$=$2x + \Delta x - 5.$

Теперь вычислим предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 5) = 2x - 5.$

Ответ: $f'(x) = 2x - 5.$

Для любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ имеем, что $y' = 2ax + b$.

Для функции $y = x^2 - 3x + 5$ (a=1, b=-3) y'=$2x - 3$.

Производная линейной функции равна константе, стоящей возле переменной x. Например, для функции $y = 6x + 5$ производная $y' = 6$.

$$(kx + b)' = k.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. **Производная суммы (**алгебраической) равна сумме производных от каждого слагаемого.
   $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. **Производная от постоянного числа равна 0.**
   y=C $\quad y' = 0$
3. **Производная от независимого переменного равна 1.**
   y=x $\quad y' = 1$
4. **Производная от произведения** равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой на производную второй функции.
   $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. **Производная от степени** равна показателю степени, умноженному на независимое переменное, показатель которого на единицу меньше**.**
   $(x^n)' = nx^{n-1}$
6. **Производная функции** $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
7. **Производная функции** $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
8. **Производная от частного** (или дроби) равна дроби, числитель которой есть разность между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя, а знаменатель есть квадрат делителя.
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$
9. **Производная от сложной функции** равна производной от данной функции по промежуточному переменному, умноженной на производную от этого переменного (по независимому переменному).
   Пусть у - есть функция от u, а количество u – функция от x. Найдем производную от у как функции от x.
   $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблица производных

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a, a\rangle 0, a \neq 1$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x\rangle 0$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x\rangle 0, a\rangle 0, a \neq 1$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Таблица производных сложных функций

1. C′=0
2. x′=1
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a\rangle 0, a \neq 1$
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}, u\rangle 0$,
7. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}, u\rangle 0, a\rangle 0, a \neq 1$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $(x^3 + 4x^2 - 11)' = (x^3)' + (4x^2)' - (11)' = 3x^2 + 8x$;

2) $\left(4x^2 - 5x - 1\right)' = 8x - 5$;

3) $$\left(\frac{2x-1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x-1)' \cdot (3x-2) - (3x-2)' \cdot (2x-1)}{(3x-2)^2} = \frac{2(3x-2) - 3(2x-1)}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{6x - 4 - 6x + 3}{(3x-2)^2} = -\frac{1}{(3x-2)^2}.$$

4) $f'(x) = ((2x^2+1)^5)' = 5(2x^2+1)^4 \cdot 4x = 20x(2x^2+1)^4$;

5) $f(x) = tg^2 3x$ = $(tg^2 3x)' = 2tg3x \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} = \dfrac{6tg3x}{\cos^2 3x}$.

Практическая работа.
Нахождение производной функции по формулам и правилам

Вариант 1
Найти производные функций.

1) $(23x)'$; 2) $(5\cos x)'$; 3) $(125)'$; 4) $\left(17^x\right)'$; 5) $\left(2\log_5 x\right)'$; 6) $\left(25x^4\right)'$; 7) $\left(\dfrac{1}{4}ctgx\right)'$; 8) $\left(\dfrac{1}{6}\ln x\right)'$ 9)

1$(2arctgx)'$; 10) $\left(32\sqrt{x}\right)'$; 11) $\left(\dfrac{16}{x^7}\right)'$; 12) $(8arcctgx)'$; 13) $\left(18e^x\right)'$; 14)

$\left(12x^5-8x^4+3x^2-4x+5\right)'$;15) $\left(x^6\cdot\log_4 x\right)'$; 16) $\left(\dfrac{2x+4}{7x-5}\right)'$; 17) $\left(7\log_9 x-\dfrac{5}{x^6}+2\arcsin x\right)'$;

18) $\left(2^x\cdot\cos x\right)'$; 19) $\left(\dfrac{4x^2-5x}{2x-7}\right)'$; 20) $\left(\dfrac{4\sqrt[3]{x}}{5}\right)'$

Вариант 2

Найти производные функций.

1) $\left(14x^2\right)'$; 2) $\left(5\sin x\right)'$; 3) $\left(12x\right)'$; 4) $\left(17\log_7 x\right)'$; 5) $\left(2\arcsin x\right)'$; 6) $\left(15tgx\right)'$; 7) $\left(\dfrac{1}{4}arcctgx\right)'$; 8) $\left(\dfrac{1}{8}e^x\right)'$ 9) $\left(12ctgx\right)'$; 10) $\left(32\sqrt[3]{x}\right)'$; 11) $\left(\dfrac{16}{x^9}\right)'$; 12) $\left(\dfrac{8}{13}\ln x\right)'$; 13) $\left(18\cdot 4^x\right)'$; 14) $\left(121^3-9x^5+3x^4-4x+16\right)'$;15) $\left(x^6\cdot\cos x\right)'$; 16) $\left(\dfrac{3x+5}{4x-3}\right)'$; 17) $\left(7tgx-\dfrac{5}{x^9}+2\sin x\right)'$; 18) $\left(e^x\cdot\arccos x\right)'$; 19) $\left(\dfrac{9x^2-4x}{5x-2}\right)'$; 20) $\left(\dfrac{4}{5x^9}\right)'$

Вариант 3

Найти производные функций.

1) $\left(25\right)'$; 2) $\left(5\arccos x\right)'$; 3) $\left(250x^2\right)'$; 4) $\left(25^x\right)'$; 5) $\left(2ctgx\right)'$; 6) $\left(25^x\right)'$; 7) $\left(\dfrac{1}{4}\log_9 x\right)'$; 8) $\left(\dfrac{1}{6}tgx\right)'$ 9) $\left(15\arcsin x\right)'$; 10) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}\right)'$; 11) $\left(\dfrac{16}{5}\ln x\right)'$; 12) $\left(18arctgx\right)'$; 13) $\left(16\cos x\right)'$; 14) $\left(10x^3-6x^9+5x^7-4\right)'$;15) $\left(2x^3\cdot\ln x\right)'$; 16) $\left(\dfrac{4x+1}{8x-5}\right)'$; 17) $\left(7e^x-\dfrac{5}{12}\sqrt{x}+14\sin x\right)'$; 18) $\left((2x+3)\cdot\cos x\right)'$; 19) $\left(\dfrac{7x^2-x}{2x+1}\right)'$; 20) $\left(\dfrac{5\sqrt[4]{x}}{7}\right)'$

Вариант 4

Найти производные функций.

1) $\left(18x^7\right)'$; 2) $\left(15arcctgx\right)'$; 3) $\left(125^x\right)'$; 4) $\left(171\right)'$; 5) $\left(21ctgx\right)'$; 6) $\left(15x^8\right)'$; 7) $\left(\dfrac{1}{4}arcctgx\right)'$; 8) $\left(\dfrac{1}{9}\log_2 x\right)'$ 9) $\left(14\arcsin x\right)'$; 10) $\left(\dfrac{2}{7}\sqrt{x}\right)'$; 11) $\left(\dfrac{15}{x^2}\right)'$; 12) $\left(8\cos x\right)'$; 13) $\left(18^x\right)'$; 14)

$\left(6x^4-3x^2+13x-4\right)'$;15) $\left(x^2\cdot tgx\right)'$; 16) $\left(\dfrac{3x+7}{4x-9}\right)'$; 17) $\left(7\sin x-\dfrac{5}{x^6}+2arctgx\right)'$; 18) $\left(e^x\cdot\ln x\right)'$;

19) $\left(\dfrac{x^2-3x}{4x+2}\right)'$; 20) $\left(\dfrac{4\sqrt[5]{x}}{5}\right)'$

Вариант 5

Найти производные функций.

1) $(145)'$; 2) $\left(15e^x\right)'$; 3) $(125x)'$; 4) $\left(147^x\right)'$; 5) $(2tgx)'$; 6) $\left(5x^2\right)'$; 7) $\left(\dfrac{5}{6}\lg x\right)'$; 8) $\left(\dfrac{1}{6}\cos x\right)'$ 9) $(4\arcsin x)'$; 10) $\left(\dfrac{5}{9}\sqrt{x}\right)'$; 11) $\left(\dfrac{6}{7}\ln x\right)'$; 12) $(5\sin x)'$; 13) $(18\cos x)'$; 14) $\left(2x^5-x^4+14x+9\right)'$;15) $\left((4x-5)\cdot tgx\right)'$; 16) $\left(\dfrac{3x-4}{x-2}\right)'$; 17) $\left(7\cos x-\dfrac{8}{x^9}+2^x\right)'$; 18) $\left(\log_7 x\cdot\cos x\right)'$; 19) $\left(\dfrac{2x^2+x}{3x-1}\right)'$;

20) $\left(\dfrac{9\cdot\sqrt[4]{x}}{4}\right)'$.

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛНОЙ

Всякая невертикальная прямая задается уравнением вида $y = kx + b$, где k —угловой коэффициент. Касательная — не исключение, и чтобы составить ее уравнение в некоторой точке x_0, достаточно знать значение функции и производной в этой точке.

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет производную $y = f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a; b)$ к графику этой функции можно провести касательную, которая задается уравнением:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Здесь $f'(x_0)$ — значение производной в точке x_0, а $f(x_0)$ — значение самой функции.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

1)вычислить $f(x_0)$;

2)найти $f'(x)$;

3)вычислить $f'(x_0)$;

4)записать в общем виде уравнение касательной $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ и в него подставить заданное значение x_0 и вычисленные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$;

5)полученное уравнение преобразовать к виду $y = kx + b$.

Пример. Дана функция $y = x^3$. Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке $x_0 = 2$.

1)для начала найдем значение функции: $f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$;

2)теперь найдем производную: $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$;

3)подставляем в производную $x_0 = 2$: $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$;

Получаем: $y = 12 \cdot (x - 2) + 8 = 12x - 24 + 8 = 12x - 16$.

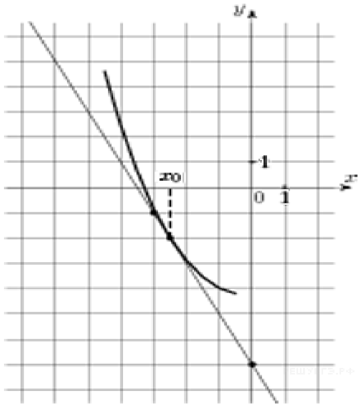
Это и есть уравнение касательной.

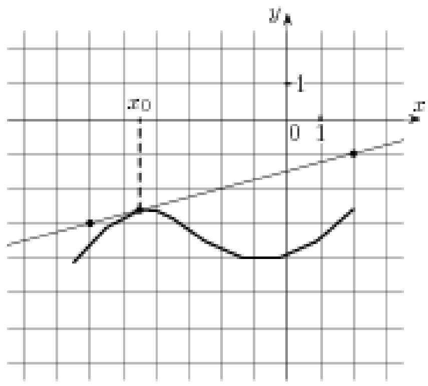
Практическая работа.
Производная функции, её геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции
Вариант 1

1.Составьте уравнение касательной: $f(x) = x^2 + x$, если $x_0 = 2$.

2.Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 1$ в точке $x_0 = 1$.

3. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.

а) 

б) 

4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y = $\cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$

5. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке x_0.

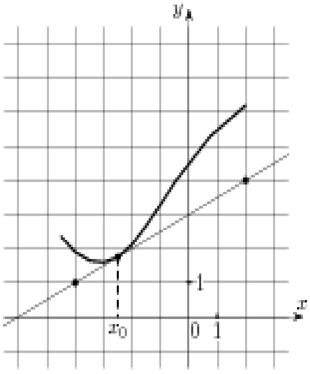
y = $2x^3 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$, $x_0 = -1$.

Вариант 2

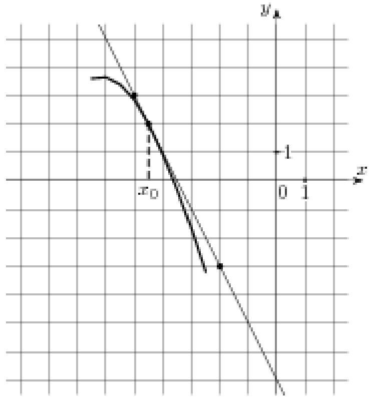
1.Составьте уравнение касательной: $f(x) = x^2 - 3x$, если $x_0 = -1$.

2.Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку A(1; 1) графика функции $f(x) = x^3 + 2$.

3. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



а)



б)

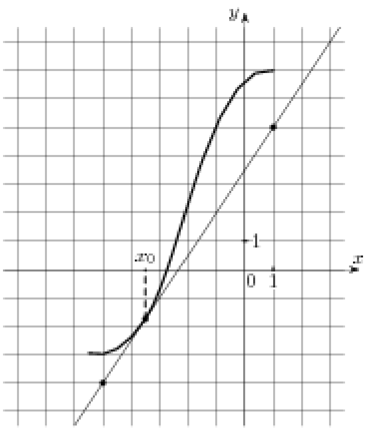
4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции у = $sin\,3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$

5. Написать уравнение касательной к графику функции у = f(x) в точке x_0.

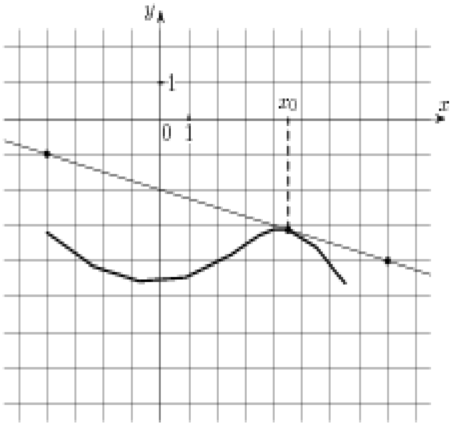
у $= \frac{x^4}{2} - \frac{2x-4}{3}$, $x_0 = -1$

Вариант 3

1. Составьте уравнение касательной: $f(x) = 1 - x^3$, если $x_0 = 1$.
2. Найти точку графика функции, $f(x) = 3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}$, в которой касательная параллельна оси Ох.
3. На рисунке изображен график функции у = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



а)



б)

4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции у = $sin\,x + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$
5. Написать уравнение касательной к графику функции у = f(x) в точке x_0.

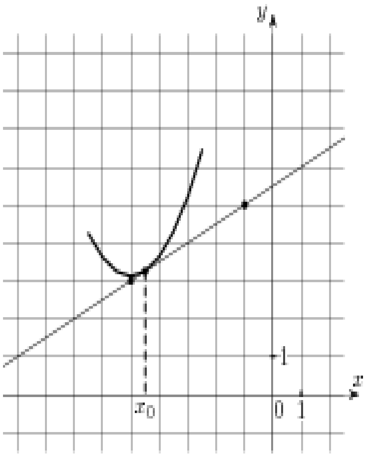
У = $4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$, $x_0 = 2$

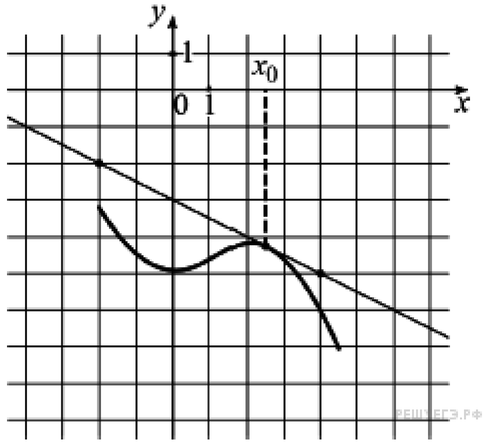
Вариант 4

1.Составьте уравнение касательной: $f(x) = x^2 - 3x$, если $x_0 = -1$.

2.Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку А(1; 1) графика функции $f(x) = x^3 + 2$.

3. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.

а) 

б) 

4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y = $x^3 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

5. Написать уравнение касательной к графику функции y = f(x) в точке x_0.

y = $-\frac{x^2}{2} - 4x + 3$, $x_0 = -1$.

ПРОМЕЖУТКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ

Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определени промежутков знакопостоянства ее производной.

Напомним соответствущие утверждения:

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале.

Для нахождения промежутков возрастания или убывания функции используется достаточные условия: на промежутке, где производная больше нуля, функция возрастает; где меньше нуля, убывает.

При выполнении таких заданий сначала находим производную данной функции, затем определяем, на каких промежутках она принимает положительные, а на каких отрицательные значения, и, наконец, записываем промежутки возрастания или убывания.

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

Решение. Находим производную функции:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 =$$
$$= 3\left(x^2 + 4x + 3\right) = 3(x+3)(x+1).$$

Для отыскания промежутков возрастания и убывания функции найдём точки, в которых $f'(x) = 0$. Такими точками являются $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$.

Исследуем знаки производной в промежутках, ограниченных этими точками. От $-\infty$ до точки $x_{1=} -3$ знак положителен, от точки $x_{1=} -3$ до точки $x_{2=} -1$ знак отрицателен, от точки $x_{2=} -1$ до $+\infty$ знак положителен. Ответ на вопрос задания: промежутки возрастания данной функции – $[-\infty; -3]$ и $[-1; +\infty]$, а промежуток убывания функции –$[-3;-1]$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Функция у = $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором интервале, если при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство ($f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Если дифференцируемая функция у = $f(x)$на отрезке [a, b] возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Точка x_o называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_o, для всех точек которой верно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$)

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – ее *экстремумами.*

Необходимые условия экстремума. Если точка x_o является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x)$=0, либо $f(x_o)$ не существует. Такие точки называют *критическими,* причем сама функция в критической точке определена. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

Первое достаточное условие. Пусть x_o - критическая точка. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_o меняет знак плюс на минус, то в точке x_o функция имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_o экстремума нет.

Второе достаточное условие. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_o и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_o. Если $f'(x)$= 0, $f''(x_0)$>0 ($f''(x_0)$<0), то точка x_o является точкой локального минимума (максимума) функции $f(x)$. Если же $f''(x_0)$ =0, то нужно либо пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие производные.

На отрезке [a,b] функция у = $f(x)$ может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка [a,b].

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

Решение.

Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3)$, то критические точки функции $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Экстремумы могут быть только в этих точках. Так как при переходе через точку $x_1 = 2$ производная меняет знак плюс на минус, то в этой точке функция имеет максимум. При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак минус на плюс, поэтому в точке $x_2 = 3$ у функции минимум. Вычислив значения функции в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, найдем экстремумы функции: максимум f(2) = 14 и минимум f(3) = 13.

Практическая работа.
Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Вариант 1

1.Найдите значение производной функции в точке x_0 :

$y = x^3-5x+3,\ x_0=1$

2.Найдите производную функции:

$y = 5\sin x – x$

3. Найдите производную функции, используя правило дифференцирования произведения:
$y = \sqrt{x} \cdot (4x – 2)$

4.Найдите производную сложной функции:

$y = (5x + 2)^7$

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x = a, если:
$y = 1/2 \cdot x^2,\ a = 3$

6. Исследуйте функцию и постройте её график:
$y = - x^3 + 3x – 2$

Вариант 2

1. Найдите значение производной функции в точке x_0 :

$y = x^4-3x^2-4,\ x_0=1$

2.Найдите производную функции:

$y = 2\cos x + 15x$

3. Найдите производную функции, используя правило дифференцирования произведения:
$y = (x^3+5) \cdot\sqrt{x}$

4.Найдите производную сложной функции:

$y = \sqrt{(7x+4)}$

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x = a, если:
$y = 1/3 \cdot x^3,\ a = - 1$

6. Исследуйте функцию и постройте её график:
$y = x^3 – 12x$

Вариант 3

1.Найдите значение производной функции в точке x_0 :

$y = x^3+3x-2,\ x_0=3$

2.Найдите производную функции:

$y = 3x - \sin x$

3.Найдите производную функции, используя правило дифференцирования произведения:

$y = \sqrt{x} \cdot (x^4 - 1)$

4. Найдите производную сложной функции:

$y = (2x - 3)^5$

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

$y = 1/4 \cdot x^4$, $a = 1$

6.Исследуйте функцию и постройте её график:

$y = x^3 - 3x + 2$

Вариант 4

1.Найдите значение производной функции в точке x_0 :

$y = x^5+2x+6$, $x_0=2$

2.Найдите производную функции:

$y = 2x - \cos x$

3. Найдите производную функции, используя правило дифференцирования произведения:

$y = (8x - 1)\cdot \sqrt{x}$

4. Найдите производную сложной функции:

$y = \sqrt{(6x - 1)}$

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

$y = 1/2 \cdot x^4$, $a = 1$

6. Исследуйте функцию и постройте её график:

$y = 3x - x^3$

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ. АЛГОРИТМ

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и имеет производную в каждой его внутренней точке, то для нахождения его наибольшего и наименьшего значений этой функции на отрезке [a;b] нужно:

1. Найти значения функции на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$;
2. Найти значения функции в критических точка, принадлежащих интервалу (a,b);
3. Из найденных в п. 1 и 2 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример: Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [-2;0].
Решение:

1. Находим значения функции на концах отрезка:
   $y(-2) = -2^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = -8 + 6 + 4 = \mathbf{2}$;
   $y(0) = \mathbf{4}$;
   $y' = 3x^2 - 3$.
2. $3x^2 - 3 = 0$,

$3(x-1)\cdot(x+1)=0,$
$x_1=1;\ x_2=-1.$
Промежутку [-2;0] принадлежит только одна стационарная точка $x_2=-1$,
$y(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+4=-1+3+4=\mathbf{6}.$

3. Из чисел 2,4,6 выбираем наибольшее значение.
   Ответ:6

Практическая работа.
Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Вариант 1
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-4x^2+12x-7$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^3+3x^2-45x-2$ на отрезке $[-6;0]$;
в) $y=x^3-9x^2+24x-1$ на отрезке $[-1;3]$;
г) $y=x+\dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 2
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-3x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-8x^3+10x^2+1$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=2x^3-18x^2+30x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{2x-4}$ на отрезке $[3;+\infty]$.

Вариант 3
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-5x^2+15x-9$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^4+2x^2-2x-2$ на отрезке $[-4;0]$;
в) $y=x^3-6x^2+3x-1$ на отрезке $[-1;2]$;
г) $y=3x+\dfrac{1}{4x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 4
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

Вариант 5
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-4x^2+12x-7$ на отрезке$[-1;5]$;
б) $y=x^3+3x^2-45x-2$ на отрезке $[-6;0]$;
в) $y=x^3-9x^2+24x-1$ на отрезке $[-1;3]$;
г) $y=x+\dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 6
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-3x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-8x^3+10x^2+1$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=2x^3-18x^2+30x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{2x-4}$ на отрезке $[3;+\infty]$.

Вариант 7
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-5x^2+15x-9$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^4+2x^2-2x-2$ на отрезке $[-4;0]$;
в) $y=x^3-6x^2+3x-1$ на отрезке $[-1;2]$;
г) $y=3x+\dfrac{1}{4x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 8
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

Вариант9
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

Вариант 10
Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-4x^2+12x-7$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^3+3x^2-45x-2$ на отрезке $[-6;0]$;
в) $y=x^3-9x^2+24x-1$ на отрезке $[-1;3]$;
г) $y=x+\dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

а) $y=-3x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-8x^3+10x^2+1$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=2x^3-18x^2+30x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{2x-4}$ на отрезке $[3;+\infty]$.

Вариант 11

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-5x^2+15x-9$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^4+2x^2-2x-2$ на отрезке $[-4;0]$;
в) $y=x^3-6x^2+3x-1$ на отрезке $[-1;2]$;
г) $y=3x+\dfrac{1}{4x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 12

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

Вариант 13

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

Вариант 14

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-4x^2+12x-7$ на отрезке $[-1;5]$;
б) $y=x^3+3x^2-45x-2$ на отрезке $[-6;0]$;
в) $y=x^3-9x^2+24x-1$ на отрезке $[-1;3]$;
г) $y=x+\dfrac{2}{3x-2}$ на отрезке $[1;+\infty]$.

Вариант 15

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

Вариант 16

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=-5x^2-12x+3$ на отрезке $[-3;2]$;
б) $y=x^4-12x^3+10$ на отрезке $[-1;2]$;
в) $y=3x^3-127x^2+45x-3$ на отрезке $[0;2]$;
г) $y=2x-\dfrac{3}{5x+4}$ на отрезке $[0;+\infty]$.

РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ

Нахождение наибольшего и наименьшего значений монотонной функции $f(x)$ на отрезке (a;b) достигается на концах отрезка. Если же заданная функция не является монотонной, но известно, что она является непрерывной, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке применяется правило:

1. Найти критические точки функции.
2. Найти значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка. Наибольшее и наименьшее значения из этих чисел и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке.

Задача 1. Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач, поставленных перед Германом, была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

Вспомним 3 этапа математического моделирования, применяемые при решении задач на оптимизацию:

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V $см^3$, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V $см^3$ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра:

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Итак, $S(x) = \dfrac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения S(x) на $(0;\infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную S´(x):

$$S'(x) = \left(\frac{\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - \left(2\pi x^3 + 2V\right)}{x^2}\right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для нахождения критических точек решим уравнение S´(x) = 0.

Корень уравнения: $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

При x < 0 < $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) < 0, а при x > $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S´(x) > 0.

Следовательно, в точке x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S(x) имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S´	_	0	+
S	↘	min	↗

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V, будет наименьшей при

h = 2x = 2 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ = $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой.

Задача 2. Среди всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой с найдите тот, площадь которого наибольшая.
Площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле:

S=a*b/2, где a,b катеты.

Поскольку гипотенуза будет являться постоянной величиной с, то мы можем выразить один катет через второй и гипотенузу.
По теореме Пифагора: $b^2=c^2-a^2$, $b=\sqrt{(c^2-a^2)}$
Тогда площадь треугольника равна: $S=a\sqrt{(c^2-a^2)}/2$
Чтобы найти точки экстремума функции, необходимо найти ее производную. Как нам известно катеты - величина переменная, а гипотенуза постоянная, поэтому дифференцировать необходимо по катету а.

$S'=(a*\sqrt{(c^2-a^2)}/2)'=1/2(\sqrt{(a^2c^2-a^4)}'=1/2(a^2*c^2-a^4)^{-1/2}(a^2*c^2-a^4)'=1/2(a^2*c^2-a^4)^{-1/2}(2ac^2-4a^3)$
$S'=0$
$1/2(a^2*c^2-a^4)^{-1/2}(2ac^2-4a^3)=0$

$$\frac{2ac^2-4a^3}{\sqrt{a^2c^2-4a^3}}=0$$

Знаменатель не может быть равен 0.
$2ac^2-4a^3=0$
$2a(c^2-2a^2)=0$
a=0 катет не может принимать значение 0.
$c^2-2a^2=0$
$c^2=2a^2$
$c=\sqrt{2}a$
$b=\sqrt{((\sqrt{2}a)^2-a^2)}=a$
Значит максимальную площадь имеет треугольник с равными катетами.

Ответ: площадь прямоугольного треугольника наибольшая, если он равнобедренный.

Практическая работа.
Решения прикладных задач с использованием производной

Вариант 1

1.Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой у = x^3 в точке А (-2;-8).
2. Кривая задана уравнением у = x^2+5x. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси ОХ, проведенных к кривой в точке с абсциссой х = -2.
3. В какой точке касательная к кривой у = x^2-1 параллельна оси ОХ.
4. Тело движется прямолинейно по закону s(t) = $3t^3$ - 4t + 2. Найти скорость и ускорение в момент времени t = 3.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции у = x^2 - x^3 на отрезке [-1;3].

Вариант 2

1.Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой у = x^3 +1 в точке С (3;-2).
2. Кривая задана уравнением у = $3x^2$+2x. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси ОХ, проведенных к кривой в точке с абсциссой х = -1.
3. В какой точке касательная к кривой у = $2x^2$-1 параллельна оси ОХ.
4. Тело движется прямолинейно по закону s(t) = t^2 - 3t + 5. Найти скорость и ускорение в момент времени t = 2.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -4x^2 + 12x - 7$ на отрезке [-1;3].

Вариант 3

1.Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой у = $2x^3$ в точке С (-3;-2).
2. Кривая задана уравнением у = x^2-2x. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси ОХ, проведенных к кривой в точке с абсциссой х = 3.
3. В какой точке касательная к кривой у = x^2-4 параллельна оси ОХ.
4. Тело движется прямолинейно по закону s(t) = $4t^2$ + 6t - 5. Найти скорость и ускорение в момент времени t = -2.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -5x^2 + 15x - 9$ на отрезке [-1;3].

Вариант 4

1.Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой у = x^3-5x в точке В (-1;2).
2. Кривая задана уравнением у = x^2-3x. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси ОХ, проведенных к кривой в точке с абсциссой х = -3.
3. В какой точке касательная к кривой у = $4x^2$+3 параллельна оси ОХ.
4. Тело движется прямолинейно по закону s(t) = $3t^4$ - 4t + 2. Найти скорость и ускорение в момент времени t = -2.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 12x^3 + 10$ на отрезке [-1;3].

Литература

Основные источники

1. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 240 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-09525-8. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/469825 (дата обращения: 27.05.2021). – Режим доступа: по подписке.
2. Богомолов, Н. В. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 108 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-09528-9. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/469826 (дата обращения: 27.05.2021).
3. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 401 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-07878-7. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/469433 (дата обращения: 27.05.2021).

Дополнительные источники

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 326 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-08799-4. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/470650 (дата обращения: 27.05.2021).

2. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 251 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-08803-8. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/470651 (дата обращения: 27.05.2021).

Интернет-ресурсы

1. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов: сайт – URL: www.fcior.edu.ru (дата обращения: 27.05.2021). - Текст: электронный.
2. Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов: сайт – URL: www.school-collection.edu.ru (дата обращения: 27.05.2021). - Текст: электронный.
3. Электронная библиотечная система Znanium.com: сайт. -URL: http://znanium.com (дата обращения: 27.05.2021).-Текс: электронный.

4. Электронная библиотечная система Юрайт: сайт. - URL: https://urait.ru/ (дата обращения: 27.05.2021).-Текс: электронный.